L'Algorithme RaPTI « Ratio Based Parallel Time Integration » pour le calcul parallèle en temps des problèmes Diffusion-Convection

Nabil Nassif[1]
Noha Makhoul Karam[2]
Yeran Soukiassian[3]

Le schéma classique du parallélisme en temps inclut les étapes suivantes :

1-Décomposition de l'intervalle du temps en « tranches » de temps.
2-Utilisation d'un schéma de prédiction séquentiel approximant les valeurs initiales de la solution au début de chaque tranche de temps.
3-Résolution en parallèle, sur chacune des tranches de temps, d'un problème à valeur initiale.
4-Utilisation d'un schéma de correction assurant, après convergence, la continuité entre les diverses tranches.
Les pas 1 à 4 sont répétés jusqu'à la convergence, en un nombre d'itérations qui doit évidemment être bien inférieur au nombre de tranches de temps. Parmi les méthodes et algorithmes les plus connus, on peut citer les « multiple shooting methods » [1] [2] [3] et le « schéma pararéel », [4] [5] [6].
L'idée de base de notre algorithme consiste dans la possibilité pour certains problèmes, en particulier les équations diffusion réaction, de mettre en place à l'étape 2 de l'algorithme un schéma de prédiction inspiré de l'application de la méthode de re-dimensionnement.
La méthode de re-dimensionnement fut introduite dans [7] et étudiée dans [8] et [9]. Elle permet pour des équations Différentielles Ordinaires autonomes d'obtenir les valeurs exactes de la solution au début de chacune des tranches et d'estimer leurs tailles en fonction d'un critère d'arrêt uniforme pour toutes les tranches. Par ailleurs grâce à des changements des variables temps et solution, on aboutit à la résolution de problèmes « similaires » sur chacune des tranches.
Dans le cas des équations diffusion réaction, la méthode de re-dimensionnement peut permettre des bonnes estimations au début de chaque tranche. Le nombre de correction peut alors devenir très petit par rapport au nombre total de tranches et la méthode se traduit alors par un parallélisme quasi-parfait des calculs, nécessitant un petit nombre de corrections.

Description de l'Algorithme RaPTI

1- Appliquer la méthode de re-dimensionnement, de façon séquentielle, sur n_s tranches et calculer les valeurs initiales exactes V_n^e de la solution en début de tranches, ainsi que les valeurs exactes des ratios r_n^e reliant les valeurs initiales successives de la solution : $V_n^e = diag(r_n^e)V_{n-1}^e$. Les calculs sont menés avec une tolérance locale ε_{tol}^l.
2- Se baser sur les n_s ratios exacts r_n^e calculés pour élaborer un ajustement mathématique optimal de la série $\{r_n^e\}$, fondé sur des procédés statistiques tels que la méthode des moindres carrés.
3- Utiliser l'ajustement trouvé pour prédire les ratios r_n^p des tranches suivantes (pour n > n_s) et par conséquent les valeurs initiales de ces tranches : $V_n^p = diag(r_n^p)V_{n-1}^p$. Notons que pour $n = n_s + 1$, on a : $V_{n-1}^p = V_{n-1}^e$.

[1] Mathematics Department, American University of Beirut
[2] IRISA, Université de Rennes
[3] Computer Science Department, American University of Beirut

4- Résoudre en parallèle et de façon indépendante les modèles re-dimensionnés sur chacune des n^{èmes} tranches (pour n > n_s), avec les valeurs initiales prédites V_n^p et pour une tolérance de calcul ε_{tol}^l. Ces calculs mènent alors à des valeurs calculées V_n^c de fin de tranches qui diffèrent généralement des valeurs initiales prédites en début de tranches suivantes.

Notons que pour n = n_s+1 , V_n^c est exacte : $V_{n_s+1}^c = V_{n_s+1}^e$.

5- Définir, pour n > n_s, les écarts $G_n = V_n^c - V_n^p$ en fin de chacune des n^{èmes} tranches.

6- Déterminer le nombre n_{conv} de tranches ayant déjà convergé pour une tolérance de calcul global $\varepsilon_{tol}^g > \varepsilon_{tol}^l$: pour $n_s < n \le n_{conv}$, $\|G_n\|_\infty \le \varepsilon_{tol}^g$.

7- Remplacer n_s par n_{conv}, et reprendre les étapes 2 à 6 jusqu'à convergence de toutes les tranches et la résolution du problème sur tout l'intervalle d'étude [0 ;T] demandé.

Cet algorithme présente plusieurs avantages :

- La prédiction des valeurs initiales aux débuts des tranches ne nécessite aucun calcul séquentiel pour n > n_s.
- La génération des tranches de temps de taille variable (dépendant du comportement de la solution) peut se faire d'une manière automatique.

Les résultats numériques pour l'équation de réaction diffusion, $u_t = \Delta u^m + au^p$, indiquent un parallélisme parfait dans le cas linéaire (p=m=1) et pour les cas non linéaire (p≤m≤1) une convergence très rapide. Une variante de cet algorithme, consistant à lui associer la procédure de correction du schéma pararéel par propagation des sauts [3], a alors été testée et a conduit à une moins bonne convergence, au prix de calculs séquentiels de correction.

Références

1.**J.Nievergelt.** *Parallel methods for integration ordinary differential equations.* Comm. ACM, 7:731-733, 1964

2.**P.Chartier, B.Philippe.** *A parallel shooting technique for solving dissipative ODE's.* Computing, vol.51, n°3-4, 1993, p.209-236.

3.**J. Erhel, S. Rault**. *Algorithme parallèle pour le calcul d'orbites*. Springer Verlag, (2000).

4.**J.L. Lions, Y.Maday, G.Turinici**. *Résolution d'EDP par un schéma en temps ``pararéel''.* C.R.Acad.Sci.Paris, t.332, Série 1, p.661-668. 2001.

5.**Y.Maday, G.Turinici.** *Apareal in time procedure for the control of partial differential equation.* C.R. Acad. Sci. Paris., Ser.I 335 (2002) 387-392

6.**Ch. Farhat, M.Chandesris.** *Time-decomposed parallel time-integrators.* Int. J. Numer. Meth. Engng 2003. **58**: 1397-1434.

7.**N.R.Nassif, D.Fayad, M.Cortas.** *Slice-Time Computations with Re-scaling for Blowing-Up Solutions to Initial Value Differential Equations.* V.S. Sunderam. et al. (Eds): ICCS 2005, LNCS 3514, pp. 58-65. Springer-Verlag 2005.

8.**Cortas M**. *Méthode de re-dimensionnement (Rescaling technique) pour des équations aux dérivées ordinaires du 1er ordre à caractère explosif}*. Thèse, Université Bordeaux 1. Janvier 2005.

9.**Makhoul-Karam N**. *Résolution numérique d'équations paraboliques semi linéaires à caractère d'explosion ou d'extinction par des méthodes de re-dimensionnement.}* Mémoire de DEA en MSI, 2002-2003.